

VEKTORRUM :: EXEMPEL

MODELL :: VEKTORRUM = $\mathbb{R}^n$

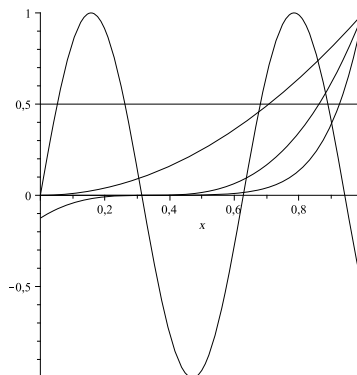
Modellen får det abstrakta vektorrumsbegreppet är $\mathbb{R}^n$: ett vektorrum är ett rum av objekt, som vi kallar för vektorer, tillsammans med en mängd skalärer¹. Vektorerna och skalärerna har addition och multiplikation med skalär definierade på sig. Om dessa operationer uppfyller räknereglerna definierade i första definitionen i kapitel 4.1 (sidan 217/233). Det här man nog tycka ser komplicerat ut men tänk då bara att dessa räkneregler helt enkelt är de vanliga räknereglerna i $\mathbb{R}^n$.

Det finns många andra vektorrum än $\mathbb{R}^n$ men om det reella vektorrummet är ändligt-dimensionellt så kan man identifiera vektorrummet med vårt vanliga reella rum. Detta betyder att vårt vanliga rum i någon mening är det enda ändligt-dimensionella reella vektorrummet.

ANDRA TYPER AV VEKTORRUM ::

Om $\mathbb{R}^n$ var väsentligen det enda vektorrum som fanns så vore det ingen mening med att abstraktifiera begreppet. Men poängen är att vektorrumsbegreppet är viktigt eftersom det finns massor av rum som inte är ändligt-dimensionella utan oändligt-dimensionella men som ändå uppfyller våra vektorrumsaxiom.

Exempel 1. Rummet av kontinuerliga funktioner $C([0, 1])$ definierade på intervallet $[0, 1]$. Grafen till sådana funktioner kan ritas utan att lyfta pennan: några exempel kan ses i figur 1.



Figur 1: Ett antal kontinuerliga funktioner på enhetsintervallet

Nå, vektorerna i $C([0, 1])$ består alltså av funktioner. Låt oss nu se vad det är som gör $C([0, 1])$ till ett vektorrum. Vi behöver alltså addition och multiplikation med skalär, låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två kontinuerliga funktioner definierade på $[0, 1]$ och $a \in \mathbb{R}$:

Då blir $f + g$ och af definierade av

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (af)(x) &= af(x)\end{aligned}$$

nya kontinuerliga funktioner definierade på $[0, 1]$. (detta uppfyller axiom 1 och 6 i definitionen av vektorrum i Lay.) Det är inte svårt att verifiera övriga axiom.

Att det finns oändligt många linjärt oberoende vektorer (funktioner) kan man förstå genom att titta på alla monom x^n $n = 1, 2, \dots$. Varje monom är kontinuerliga funktioner på vårt intervall.

Om man tar en linjärkombination av de m första monomen så får man ett polynom av grad m . Inget polynom av grad m har en term x^{m+1} ty då hade det varit ett polynom av grad $m + 1$.

¹Om skalärerna är $\mathbb{R}$ om så är vektorrummet ett reellt vektorrum och om skalärerna är $\mathbb{C}$, de komplexa talen, så har vi ett komplext vektorrum. Vi kommer bara studera reella vektorrum.

Detta visar (lite tankearbete krävs) att alla oändligt många monom tillsammans bildar en linjärt oberoende mängd. Detta gör att en bas för $C([0, 1])$ (som ju är både linjärt oberoende och spänner upp rummet) måste innehålla oändligt många av våra vektorer/funktioner.

I sådana här funktionsrum blir tanken naturlig att summera oändligt många funktioner (t.ex linjärkombinationer av en bas med oändligt många vektorer) och då uppstår nya problem. Vad är det som säger att summan av oändligt många kontinuerliga funktioner blir en ny kontinuerlig funktion? Funktionen $h(x) = 1$ är ett för varje värde på x . Om jag nu summerar ett oändligt antal kopior av denna så adderas oändligt många ettor och då får man ∞ som ligger utanför de reella talen. Vad vi får är att vi måste studera så kallad konvergens av funktionsföljder och är något som ligger en bit utanför den nivå som vi befinner oss i denna kurs. Funktionsrummen är visserligen vektorrum men de har andra egenskaper som gör de komplicerade att studera.

För vårt vanliga $\mathbb{R}^n$ så har vi sett att linjära avbildningar kunde tolkas som matriser. Så är det för alla reella ändligtdimensionella vektorrum. Men för oändligtdimensionella vektorrum är saken helt annorlunda.

Exempel 2. Ett annat viktigt exempel på ett vektorrum är $C^\infty([0, 1])$: rummet av alla funktioner som är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbara. Om vi låter $f(x)$ och $g(x)$ vara sådana funktioner och $a, b \in \mathbb{R}$ så kan vi definiera två linjära funktioner från $C^\infty([0, 1])$ till $C^\infty([0, 1])$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} : f &\rightarrow \frac{df}{dx} = f'(x) \\ \int : f &\rightarrow \int f(x)dx \end{aligned}$$

Det här är alltså vanlig derivering och integrering (något som ni kommer att få studera närmare i kurser i matematisk analys)

Derivering och integrering är linjära funktioner eftersom

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) &= a\frac{df}{dx} + b\frac{dg}{dx} = af'(x) + bg'(x) \\ \int (af(x) + bg(x))dx &= a\int f(x)dx + b\int g(x)dx \end{aligned}$$

men de är inte matriser.

VEKTORRUM I DENNA KURS I LINJÄR ALGEBRA ::

Ovanstående exempel syftar endast till att motivera varför vektorrum är viktiga i matematiken. I denna kurs studerar vi enbart de ändligtdimensionella vektorrummen och $\mathbb{R}^n$ i synnerhet. Studiet av funktionsrummen kommer oftast först när man närmar sig forskarstudier, i kurser som t.ex. funktionalanalys.

Men rummen är viktiga inom approximationsteori, optimeringslära, differentialekvationer och fourieranalys, matematikområden som är väldigt viktiga för centrala delar av ingenjörsvetenskapen.

Men för er gäller alltså i princip::

$$\text{VEKTORRUM} = \mathbb{R}^n$$